MASARYKOVA UNIVERZITA V BRNĚ
FAKULTA PŘÍRODOVĚDECKÁ

KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY

Matematické modely a jejich analýza

Diplomová práce

Brno, leden 2007

Pavla Vaněčková

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a použila jsem jen uvedenou literaturu.

V Brně dne 4. ledna 2007

Pavla Vaněčková

Poděkování

Chtěla bych poděkovat doc. RNDr. Josefu Kalasovi CSc., vedoucímu mé diplomové práce, za cenné rady, připomínky a čas, který mi věnoval od zadání diplomové práce až po její dokončení.

Obsah

Úvod

Cílem práce je pojednat o využití teorie obyčejných diferenciálních rovnic v matematickém modelování vojenských konfliktů.

Práce je rozdělena do čtyř kapitol.

V 1. kapitole je vymezen pojem matematického modelu, proces modelování a uvedena teorie diferenciálních rovnic převzatá z publikací [1] a [2].
V 2. kapitole jsem se věnovala sestavení a analytickému rozboru tří typů Lanchesterových modelů boje. Odstavec 2.1 popisuje kvadratický model konvečního boje a určení podmínky pro vítězství, doby trvání boje, počtů bojeschopných prostředků vítězné strany na konci boje a spotřeby střeliva s uvedením praktických příkladů. Odstavec 2.2 je věnován lineárnímu modelu partyzánského boje a odstavec 2.3 parabolickému modelu smíšeného boje, pro které jsem určila podmínky pro vítězství a dobu trvání boje. V této kapitole jsem čerpala z publikací [3] a [4].

V 3. kapitole je pomocí modelu konvenčního boje popsána bitva 2. světové války o strategický ostrov Ivodžima. S využitím úvah a dat z publikací [4], [5] jsem zkoumala reálné hodnoty a teoreticky vypočítané hodnoty parametrů.

Ve 4. kapitole je vyložena Richardsonova teorie konfliktu. Sestavení matematického modelu a úvahy při určování velikosti konstant.

Práci uzavírá seznam celkem 5 použitých publikací.

Kapitola 1

Úvod do matematického modelování

1.1 Pojem modelu a modelování

Modelem je nazýváno zjednodušené zobrazení zkoumané zkutečnosti (např. biologického objektu) realizované k určitému cíli. Zkoumaná skutečnost se nazývá **originálem** (prototypem nebo předmětem modelování). **Modelováním** se pak rozumí účelové zobrazování vyšetřovaných vlastností originálu pomocí vhodně zvolených vlastností modelu. Jedná se tedy o reprodukci vybraných vlastností studovaného objektu na modelu, tj. analogickém objektu simulujícím chování a vlastnosti původního studovaného objektu.
Modely mohou být tříděny mnoha způsoby (viz [2, str. 2 - 3]):

1. Třídění podle zobrazovaných vlastností originálu

    - *substanciální modely* - shodují se s originálem ve všech nebo v některých základních vlastnostech,
    - *strukturní modely* - zobrazují zejména vnitřní uspořádání prvků, z nichž se skládá zkoumaný originál,
    - *funkční modely* - zobrazují různé funkce resp. chování originálu,
    - *smíšené modely* - kombinace předchozích případů, v praxi se modely objevují jen zřídka v ryzí formě.

2. Třídění podle povahy zobrazovací funkce

    - *materiální modely* - fungují na základě objektivních zákonů nezávisle na činnosti lidí. Člověk může měnit pouze podmínky existence objektu. Přitom není podstatné, zda model vznikl bez činnosti člověka nebo jeho činností.

- *ideální modely*

3. Třídění z hlediska formálně konstruktivního

   - *modely matematické* - modely vytvořené pomocí matematických výrazových prostředků,
   - *modely schematické* - všechny nematematické modely.

Matematické modely se dělí na *stochastické*, které obsahují jako své prvky náhodné veličiny, a *deterministické*, tj. takové, které nejsou stochastické. Dále lze matematické modely dělit na *statické*, které jsou nezávislé na čase, a *dynamické*, do nichž je včleněn čas. Deterministické dynamické matematické modely se dále dělí na *spojité*, které pracují se spojitými veličinami a na *diskrétní* pracující s diskrétními veličinami. Dále je možné matematické modely ještě rozlišovat na *demonstrativní*, které obsahují parametry, které nemají interpretovatelný význam a *explikativní* modely, které jsou založeny na jasných (pozorovatelných a kvantifikovatelných) pojmech.

Proces matematického modelování lze rozdělit na čtyři etapy:
1. sestavení modelu - zápis vlastností a zkoumaných zákonitostí objektů pomocí matematických termínů,
2. analýza modelu a získání teoretických důsledků,
3. zkoumání, zda hypotetický model vyhovuje kritériu praxe,
4. následná anylýza modelu v souvislosti s nashromážděním nových poznatků o zkoumaných jevech, případná modernizace modelu.

1.2 Matematický aparát - teorie obyčejných diferenciálních rovnic

Základní pojmy

Buď G podmnožina euklidovského prostoru $\mathbf{R}^2$ a f reálná funkce definovaná na G. Rovnice

$$y' = f(x, y), \qquad ' = \frac{d}{dx} \tag{1.1}$$

se nazývá **diferenciální rovnice 1. řádu**. Řešením této rovnice se rozumí funkce y, která je diferencovatelná v nějakém intervalu J a splňuje podmínky

$$[x, y(x)] \in G \quad \text{a} \quad y'(x) = f(x, y(x)) \quad \text{pro každé } x \in J.$$

Diferenciální rovnice (1.1) přiřazuje každému bodu $[x, y]$ definičního oboru G funkce f právě jednu hodnotu $y'(x)$, kterou můžeme chápat jako směrnici přímky procházející bodem $[x, y]$. Tato přímka se nazývá **lineární element** rovnice (1.1) v bodě $[x, y]$. Množina všech lineárních elementů se nazývá **směrové pole** dané rovnice. Křivky, v jejichž bodech je danou rovnicí předepsána táž hodnota $y' = c$ jsou označovány jako **izokliny**. Jedna diferenciální rovnice může mít nekonečně mnoho řešení.

Buď $[x_0, y_0]$ libovolný bod v G. Úloha určit řešení rovnice (1.1), které splňuje **počáteční podmínku**

$$y(x_0) = y_0, \tag{1.2}$$

se nazývá **počáteční (Cauchyův) problém** nebo **úloha**.
Může se stát, že daný počáteční problém nemá řešení nebo má řešení více. Nastane-li taková situace, že existuje řešení y počátečního problému (1.1), (1.2), které není zúžením žádného jiného řešení, nazývá se y **úplné řešení**. Existuje-li úplné řešení počátečního problému (1.1), (1.2) takové, že každé jiné řešení tohoto problému je jeho zúžením, budeme stručně říkat, že daný problém **má právě jedno řešení**. **Obecným řešením** rovnice (1.1) budeme rozumět funkci závisející na jednom parametru C takovou, že speciální volbou C lze získat řešení každého počátečního problému (1.1), (1.2).

Systémy lineárních diferenciálních rovnic

Je dán systém lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu

$$\begin{aligned}
x_1' &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + ... + a_{1n}(t)x_n + f_1(t),\\
x_2' &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + ... + a_{2n}(t)x_n + f_2(t),\\
&\dots\dots\dots\dots\\
x_n' &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + ... + a_{nn}(t)x_n + f_n(t),
\end{aligned}$$

kde $a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}, a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}, ..., a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{nn}, f_1, f_2, ..., f_n$ jsou spojité reálné funkce na nějakém intervalu I a $'$ značí derivaci podle t.
Dále budeme kvůli jednoduchosti a přehlednosti užívat vektorové a maticové symboliky.

Řešením systému lineárních rovnic

$$x' = A(t)x + b(t), \tag{1.3}$$

kde A je maticová funkce řádu n

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

a $b = (f_1, f_2, ...f_n)$ je n-vektorová funkce, kde $f_1, f_2, ...f_n$ jsou definované a spojité na nějakém intervalu I, budeme rozumět n-vektorovou funkci $\varphi(t)$, která je diferencovatelná na nějakém podintervalu intervalu I a splňuje

$$\varphi'(t) = A(t)\varphi(t) + b(t).$$

Je-li $b(t) \equiv 0$, nazývá se rovnice (1.3) **homogenní**, v opačném případě **nehomogenní**. Rovnice $x' = A(t)x$ se nazývá **přidružená** k rovnici (1.3).

Buď $t_0 \in I, x_0 \in \mathbf{R^n}$. Problém určit řešení rovnice (1.3) splňující počáteční podmínku $x(t_0) = x_0$, se nazývá počáteční **Cauchyho problém** nebo úloha. Stručně jej budeme zapisovat ve tvaru

$$x' = A(t)x + b(t), \qquad x(t_0) = x_0. \tag{1.4}$$

Počáteční problém (1.4) má právě jedno řešení, jestliže maticová funkce A a vektorová funkce b jsou spojité na intervalu I. Toto řešení existuje na celém intervalu I a je limitou tzv. **Picardovy posloupnosti postupných aproximací**

$$\varphi_0(t) \equiv 0, \qquad \varphi_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)\varphi_k(s) + b(s)]ds, \qquad k = 0, 1... \tag{1.5}$$

Autonomní systémy

Definice 1.1. *Vektorová diferenciální rovnice*

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \tag{1.6}$$

kde vektorová funkce f je definovaná na nějaké oblasti Ω v prostoru R^n, se nazývá **autonomní systém**. *Oblast Ω se nazývá* **fázový prostor**, *proměnná t se nazývá* **čas**. *Řešení $x = \varphi(t)$ rovnice (1.6), interpretované jako křivka v prostoru Ω daná parametricky rovnicí $x = \varphi(t)$, nazýváme* **trajektorie** *systému (1.6). Trajektorie rovnice se nazývá* **cyklus**, *jestliže je uzavřenou křivkou.*

Definice 1.2. *Předpokládejme diferencovatelnost funkcí $f_1(x, y)$ a $f_2(x, y)$. Matice*

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

se nazývá **Jacobiho matice**.

Definice 1.3. **Charakteristický polynom** $p(\lambda)$ *matice*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

je polynom ve tvaru

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\,\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Kořeny λ_1, λ_2 charakteristického polynomu se nazývají **vlastní čísla** *matice A.*

Definice 1.4. *Bod x_0 se nazývá* **singulární bod** *(stacionární, kritický, rovnovážný bod) rovnice (1.6), jestliže $f(x_0) = 0$.*

Věta 1.1. Předpokládejme jednoznačnost každé počáteční úlohy pro rovnici (1.6). Potom tento autonomní systém může mít trajektorie trojího typu :
1. Singulární body. Odpovídají konstantním řešením.
2. Uzavřené trajektorie (cykly).Odpovídají nekonstantním periodickým řešením.
3. Trajektorie, které samy sebe neprotínají.

Důkaz: viz [2, str.97]

Definice 1.5. *Buď dán autonomní systém dvou rovnic*

$$x' = f(x), \tag{1.7}$$

kde f je spojitá funkce z Ω do R^2, kde $\Omega \subseteq R^2$ je oblast obsahující singulární bod rovnice (1.7). Předpokládáme existenci a jednoznačnost řešení pro každý počáteční problém. Singulární bod x_0 rovnice (1.7) se nazývá:

Střed, *když existuje ryzí okolí U bodu x_0 takové, že každým bodem $a \in U$ prochází jediná trajektorie, která je uzavřená a obsahuje ve svém vnitřku bod x_0,*

Ohnisko, *když existuje ryzí okolí U bodu x_0 takové, že bod $x(t)$ trajektorie x vycházející z libovolného bodu $a \in U$ má tuto vlastnost, že konverguje pro $t \to \infty$ nebo $t \to -\infty$ k x_0, a to tak, že velikost orientovaného úhlu vektoru $\overrightarrow{x_0x(t)}$ od nějakého pevného vektoru $\overrightarrow{x_0x_1}$ má nevlastní limitu,*

Uzel, *když existuje ryzí okolí U bodu x_0 takové, že pro bod $x(t)$ trajektorie x vycházející z libovolného bodu $a \in U$ platí:*

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0 \qquad \text{nebo} \qquad \lim_{t\to-\infty} x(t) = x_0,$$

přičemž velikost orientovaného úhlu vektoru $\overrightarrow{x_0x(t)}$ od nějakého pevného vektoru $\overrightarrow{x_0x_1}$ má konečnou limitu,

Sedlo, *když existuje jen konečný počet trajektorií $x = x(t)$ takových, že*

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0 \qquad \text{nebo} \qquad \lim_{t\to-\infty} x(t) = x_0.$$

Provedeme nyní klasifikaci singulárních bodů lineárního autonomního systému ve fázovém prostoru $\mathbf{R^2}$

$$x' = Ax, \tag{1.8}$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad a_{ij} \in \mathbf{R}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Označme

$$\Delta := detA = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$D := (a_{11} + a_{22})^2 - 4\left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21},$$

takže D je diskriminant charakteristické rovnice matice A.

Jednotlivé typy sinulárního bodu [0,0] rovnice (1.8) jsou charakterizovány následovně[1] :

$$\begin{aligned}
\text{Ohnisko:}\quad & \Delta > 0 \quad D < 0, \quad a_{11} + a_{22} \neq 0.\\
\text{Střed:}\quad & \Delta > 0 \quad D < 0, \quad a_{11} + a_{22} = 0.\\
\text{Uzel:}\quad & \Delta > 0 \quad D \geq 0.\\
\text{Sedlo:}\quad & \Delta < 0.
\end{aligned}$$

Blíže popsáno: viz [2, str. 98 - 105].

Stabilita

Budeme se zabývat systémem diferenciálních rovnic

$$x' = f(t, x) \tag{1.9}$$

za předpokladu, že vektorová funkce f je spojitá na množině $D = \{[t, x] \in R^{n+1} : t \in J = \langle t_0, \infty), |x| < a\}$, kde $0 < a \leq \infty$. Číslo a nazveme **poloměrem** množiny D.

Hlavní pozornost budeme věnovat vektorovým rovnicím

$$y' = A(t)y \tag{1.10}$$

a

$$x' = A(t)x + g(t, x), \tag{1.11}$$

kde A je čtvercová matice řádu n spojitá na J a g je vektorová funkce spojitá na D, taková že $g(t, 0) \equiv 0$. Označíme si $Y = Y(t)$ nějaké fundamentální řešení maticové rovnice $Y' = A(t)Y$.

Definice 1.6. *Řešení x_0 rovnice* (1.9) *se nazývá* **ljapunovsky stabilní** *(stručně* **stabilní***), když ke každému $\varepsilon > 0$* a *$t_1 \geq t_0$ existuje $\delta = \delta(\varepsilon, t_1) > 0$ tak, že každé řešení x rovnice* (1.9) *vyhovující podmínce $|x(t_1) - x_0(t_1)| < \delta$ existuje pro $t \geq t_1$ a splňuje pro tato t nerovnost*

$$|x(t) - x_0(t)| < \varepsilon.$$

Není-li řešení x_0 stabilní, nazývá se **nestabilní**.

[1] V případě $\Delta = 0, A \neq O$ vyplňují singulární body rovnice (1.8) přímku procházející počátkem. Je-li navíc $a_{11} + a_{22} \neq 0$, jsou ostatní trajektorie rovnice (1.8) otevřené, vzájemně rovnoběžné polopřímky vycházející z bodů této přímky a svírající s ní stejný nenulový úhel. Je-li $a_{11} + a_{22} = 0$, jsou ostatní trajektorie rovnice (1.8) přímky rovnoběžné s přímkou tvořenou singulárními body.

Věta 1.2. *Nulové řešení rovnice* (1.10) *je stabilní právě tehdy, když existuje* $K > 0$ *tak, že*

$$|Y(t)| \leq K \qquad \text{pro } t \in J.$$

Důkaz: viz [2, str. 125]

Věta 1.3. *Nulové řešení rovnice* (1.10)*, kde A je konstantní matice, je stabilní právě tehdy, když každý kořen charakteristické rovnice matice A má nekladnou reálnou část a každý kořen s nulovou reálnou částí je jednoduchého typu (tj. každý blok odpovídající takovému kořenu v Jordanově kanonickém tvaru má nenulové prvky jen v hlavní diagonále).*

Důkaz: viz [2, str. 126]

Definice 1.7. *Řešení x_0 rovnice* (1.9) *se nazývá* **stejnoměrně stabilní***, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tak, že pro každé $t_1 \geq t_0$ všechna řešení rovnice* (1.9) *splňující podmínku $|x(t_1) - x_0(t_1)| < \delta$ existují pro všechna $t \geq t_1$ a splňují pro ně nerovnost*

$$|x(t) - x_0(t)| < \varepsilon.$$

Věta 1.4. *Nulové řešení rovnice* (1.10) *je stejnoměrně stabilní právě tehdy, když existuje $K > 0$ tak, že*

$$|Y(t)\,Y^{-1}(s)| \leq K \qquad \text{pro } t_0 \leq s \leq t < \infty.$$

Důkaz: viz [2, str. 127]

Definice 1.8. *Řešení rovnice* (1.9) *se nazývá* **asymptoticky stabilní***, když je stabilní a když ke každému $t_1 \geq t_0$ existuje $\delta = \delta(t_1) > 0$ tak, že pro každé řešení x rovnice* (1.9) *splňující nerovnost $|x(t_1) - x_0(t_1)| < \delta$ platí*

$$\lim_{t \to \infty} |x(t) - x_0(t)| = 0.$$

Věta 1.5. *Nulové řešení rovnice* (1.10) *je stabilní právě tehdy, když* $|Y(t)| \to$ pro $t \to \infty$.

Důkaz: viz [2, str. 128]

Věta 1.6. *Nulové řešení rovnice* (1.10) *s konstantní maticí A je asymptoticky stabilní právě tehdy, když každý kořen charakteristické rovnice matice A má zápornou reálnou část.*

Důkaz: viz [2, str. 129]

Definice 1.9. *Singulární bod x^* systému* (1.9) *se nazývá* **stabilní***, jestliže je konstantní řešení systému asymptoticky stabilní a* **nestabilní***, jestliže je konstantní řešení systému nestabilní.*

Kapitola 2

Lanchesterovy modely boje

Vojenští stratégové odedávna znají pravidlo 3 : 1. Podle něho musí mít v bitvě útočník trojnásobnou převahu, aby měl šanci překonat obránce. V roce 1916 zobecnil tuto poučku anglický vynálezce a matematik Frederick William Lanchester. Odvodil několik modelů boje - jednoduché soustavy dvou obyčejných diferenciálních rovnic, které popisují dynamiku ztrát obou válčících stran. Ztráty útočníka jsou přímo úměrné síle obránce a naopak. Za druhé světové války Lanchesterovo pravidlo fungovalo například v bitvách u Kurska, v ponorkové válce v Atlantiku a na bojištích v Pacifiku. Perfektně například popisuje průběh bitvy na ostrově Ivodžima.
Předpokládejme, že proti sobě stojí vojsko X a Y.

Označme:
b, resp. c je **bojový koeficient** vojska Y, resp. X (udává kvalitu výzbroje a výcviku vojska). *Nezáporná* konstanta udávaná v jednotkách den^{-1}.
g, resp. h je **bojový koeficient účinnosti** vojska Y, resp. X. *Nezáporná* konstanta v jednotkách *časová jednotka*$^{-1}$ $\times$ *počet bojeschopných prostředků*$^{-1}$.
a, resp. d je **koeficient ztrát** vojska X, resp. Y, závislých na nebojových ztrátách (např. dezerce, nemoci, nehody apod.). *Nezáporná* konstanta udávaná v jednotkách den^{-1}.
t je počet dnů od začátku boje.
$P(t)$, resp. $Q(t)$ je velikost **posily** (počet nových bojeschopných bojových prostředků vstupujících do boje) za *den* vojska X, resp. Y.
$x(t)$, resp. $y(t)$ je počet bojeschopných bojových prostředků v čase t vojska X, resp. Y.
x_0, resp. y_0 je počet bojových prostředků vojska X, resp. Y na začátku boje.

S použitím tohoto označení lze sestavit 3 typy Lanchestrových modelů boje:

Konvenční boj
Tento model popisuje například historické bitvy z dob Napoleonské války nebo Občanské války. Vojska stojí proti sobě a útočí dokud jedno z nich nezvítězí a druhé neprohraje. Hlavním předpokladem tohoto modelu je, že každý voják z vojska X je bojeschopný a může přímo útočit na jakéhokoliv bojeschopného vojáka z protilehlého vojska Y a naopak.

$$\frac{dx(t)}{dt} = -ax(t) - by(t) + P(t), \tag{2.1a}$$
$$\frac{dy(t)}{dt} = -cx(t) - dy(t) + Q(t). \tag{2.1b}$$

Partyzánský boj
Tento model popisuje situace, které se například odehrály mezi partyzánskými skupinami v Libanonu. Partyzáni nevidí své protivníky, ale ví, že se nachází na určitém ohraničeném území. Čím větší skupina partyzánů se na území nachází, tím je větší pravděpodobnost zásahu. Proto partyzánský boj většinou probíhá mezi malými skupinami bojovníků.

$$\frac{dx(t)}{dt} = -ax(t) - gx(t)y(t) + P(t), \tag{2.2a}$$
$$\frac{dy(t)}{dt} = -dy(t) - hx(t)y(t) + Q(t). \tag{2.2b}$$

Smíšený konvenční a partyzánský boj
Tento model využívá kombinaci konvenčního vojska Y a partyzánské skupiny bojovníků X. Například válka ve Vietnamu nebo některé boje války mezi Afganistánem a Irákem.

$$\frac{dx(t)}{dt} = -ax(t) - gx(t)y(t) + P(t), \tag{2.3a}$$
$$\frac{dy(t)}{dt} = -cx(t) - dy(t) + Q(t). \tag{2.3b}$$

2.1 Konvenční boj: Kvadratický model

Kvadratický model boje patří mezi nejjednodušší analytické modely popsané soustavou obyčejných diferenciálních rovnic.
Aby boj mohl být popsán Lanchesterovým kvadratickým modelem, musí bojové sestavy, procesy boje i prostředí bojiště splňovat řadu podmínek.

1. **Bojové sestavy**
   Předpokládáme, že bojové síly strany X jsou tvořeny stejnorodými bojovými prostředky (například tanky jednoho typu), jejichž počet na začátku boje je x_0. Strana Y má k dispozici y_0 stejnorodých prostředků.
   Prostředky obou stran nemusí být totožné.
   Každý bojeschopný prostředek jedné strany může v libovolný okamžik působit na libovolný bojeschopný prostředek strany druhé a naopak.

2. **Procesy boje**
   Všechny bojové prostředky zahajují boj současně.
   Každý prostředek jedné strany vede palbu na bojeschopné cíle druhé strany, dokud není sám zničen nebo dokud boj neskončil.
   Jedním výstřelem může být zničen pouze jeden cíl. Je-li cíl zničen, pak přesunutí palby na další cíl je okamžité.

3. **Prostředí bojiště**
   Dovoluje po celou dobu trvání boje každému bojeschopnému prostředku jedné strany působit palbou na libovolný prostředek strany druhé a naopak.

Dále předpokládejme, že ztráty závislé na nebojových škodách a posila budou nulové.
Rovnice (2.1) se nám zredukují na jednoduchý lineární systém.

$$\frac{dx}{dt} = -by, \qquad \frac{dy}{dt} = -cx, \tag{2.4}$$

Konstanty b a c získáme pomocí poznatků teorie pravděpodobnosti.

Při matematickém popisu boje musíme brát v úvahu, že okamžiky výstřelů jednotlivých bojových prostředků jsou náhodné a předem neznámé. Tuto posloupnost výstřelů v daném časovém intervalu budeme považovat za tok událostí. Jestliže body $t_1, t_2, ..., t_i, ...$ jsou od sebe vzdálenené o různý časový interval a nezávislé na sobě, pak tento tok událostí je znám jako *Poissonův tok*. Ten má následující dvě vlastnosti:

1. Pro dva libovolné časové intervaly τ_1 a τ_2, které se mohou i překrývat, nezávisí počet událostí (pro nás výstřelů), připadajících na jeden z nich, na tom, kolik událostí připadne na druhý interval.

2. Pravděpodobnost, že v okamžiku t nastanou dvě nebo více událostí můžeme zanedbat. Ve srovnání s pravděpodobností, že nastane jen jedna událost je totiž velmi malá.

Dostáváme tedy, že počet událostí x je náhodná veličina s Poissonovým rozdělením a pravděpodobnost, že za dobu τ nastane právě x událostí, máme vztah:

$$P(x) = \frac{b^x}{x!}e^{-b},$$

kde b je *střední hodnota množství událostí za dobu* τ, v našem případě označen jako bojový koeficient. Střední hodnota množství událostí za časovou jednotku (tj. den) se nazývá *hustota toku událostí* a označíme ji r. Hustota toku může být konstantní nebo závislá na čase. Pro konstantní hustotu toku je střední hodnota b úměrná délce časového intervalu τ. Tedy

$$b = r \cdot \tau.$$

Pro hustotu toku $r(t)$ závislém na čase t je střední hodnota množství událostí b za časový interval délky τ dána vztahem

$$b = \int_t^{t+\tau} r(t)dt.$$

Dalším důležitým pojmem, který souvisí s matematickým popisem bojové činnosti, je *tok úspěšných výstřelů*, tedy výstřelů, které zasáhly cíl. Pokud původní tok výstřelů byl Poissonův, pak i tok úspěšných výstřelů je Poissonův. Jeho střední hodnota je tedy

$$b = r_y p_y,$$

kde r_y značí hustotu toku výstřelů strany Y za časovou jednotku (tj. rychlost střelby) a p_y je pravděpodobnost zásahu cíle jednotlivým výstřelem.
Obdobně $c = r_x p_x$ udává hustotu toku úspěšných výstřelů vojska X.

V tomto okamžiku víme, co přesně značí koeficienty b, c a jak získáme jejich hodnotu. Nyní přistoupíme na analýzu samotného kvadratického modelu boje. Dělením rovnic (2.4) obdržíme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx}{by}. \tag{2.5}$$

Oddělením proměnných a integrací obdržíme vztah, který vysvětluje, proč je tento model nazýván *kvadratický*

$$b(y^2(t) - y_0^2) = c(x^2(t) - x_0^2), \tag{2.6}$$

kde $x_0 > 0$ a $y_0 > 0$ jsou počty bojových prostředků vojska X a Y na začátku boje. Označme $K = by_0^2 - cx_0^2$ a získáváme rovnici

$$by^2 - cx^2 = K.$$

$x(t)$ a $y(t)$ mohou nabývat pouze nezáporných hodnot, a proto se budeme zabývat pouze trajektoriemi ležícími v prvním kvadrantu (viz Obrázek 2.1).
Je-li $K = 0$, trajektorií systému (2.4) různá od singulárního bodu $(0, 0)$ je polopřímka, jejíž rovnice je $y = \sqrt{\frac{c}{b}}x$. Polořímka $y = -\sqrt{\frac{c}{b}}x$ neleží v prvním kvadrantu a tedy nás nezajímá.
Je-li $K \neq 0$, trajektorie systému (2.4) jsou hyperboly.
Je-li $K < 0$, trajektorie protne osu x v bodě $x = \sqrt{\frac{-K}{c}}$. Pak zvítězí vojsko X, neboť vojsko Y bude zničeno. V opačném případě, je-li $K > 0$, pak zvítězí vojsko Y a trajektorie protne osu y v bodě $y = \sqrt{\frac{K}{b}}$.

Rovnice (2.4) vyjadřuje sílu vojska v závislosti na vojsku protivníka, ale nevyjadřuje závislost na čase.
Pokud využijeme rovnice (2.4) (zderivujeme první část a dosadíme za $\frac{dy}{dt}$, obdržíme

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -b\frac{dy}{dt} = bcx$$

neboli

$$\frac{d^2x}{dt^2} - bcx = 0 \tag{2.7}$$

s počátečními podmínkami $x(0) = x_0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = -by_0.$
Řešení lineární homogenní diferenciální rovnice 2. řádu (2.7) je

$$x(t) = x_0 \cosh \beta t - \gamma y_0 \sinh \beta t, \tag{2.8}$$

kde $\beta = \sqrt{bc}$ a $\gamma = \sqrt{\frac{b}{c}}$.
Podobně

$$y(t) = y_0 \cosh \beta t - \frac{x_0}{\gamma} \sinh \beta t. \tag{2.9}$$

2.1.1 Podmínka pro vítězství

Řekneme, že boj je ukončen, pokud jedna z bojujících stran ztratí všechny své prostředky.
Vojsko X zvítězí, pokud $K < 0$. Tzn., že vojsko X potřebuje, aby platila následující nerovnost

$$cx_0^2 > by_0^2. \tag{2.10}$$

Tedy

$$1 < \sqrt{\frac{c}{b}}\frac{x_0}{y_0}.$$

Označme $\sqrt{\frac{c}{b}}\frac{x_0}{y_0} = v$.

Pro vítězství vojska Y musí platit opačná nerovnost

$$cx_0^2 < by_0^2. \tag{2.11}$$

Tedy

$$1 > v.$$

Z tvaru podmínky pro vítězství vyplývá, že síla vojska roste rychleji při zvyšování početního stavu, než při zvyšování bojového koeficientu účinnosti vojska. Pokud zdvojnásobíme počet prostředků bude tento krok ekvivalentní čtyřnásobnému zvýšení účinnosti těchto prostředků.

PŘÍKLAD 1: Vojsko strany X se má střetnout se 4 000 vojáky strany Y. Voják strany X může vystřelit průměrně 10 výstřelů za minutu s pravděpodobností zásahu $p_x = 0{,}2$. Hůře vycvičení vojáci strany Y vystřelí průměrně 5 výstřelů za minutu s pravděpodobností zásahu $p_y = 0{,}05$.
Určete, kolik bojeschopných vojáků musí do boje nasadit strana X, aby zvítězila.
Řešení:

$$\begin{aligned} b = p_y r_y &= 0{,}05 \cdot 5 = 0{,}25, \\ c = p_x r_x &= 0{,}2 \cdot 10 = 2. \end{aligned}$$

Aby zvítězila strana X, musí platit:

$$\begin{aligned} \frac{x_0}{4\,000} \cdot \sqrt{\frac{2}{0{,}25}} &> 1, \\ x_0 \cdot 2{,}828 &> 4\,000, \\ x_0 &> 1\,414{,}2. \end{aligned}$$

Strana X musí do boje nasadit alespoň 1415 vojáků.

2.1.2 Čas ukončení boje

Předpokládejme vítězství strany X. Pro čas ukončení boje t_X pak platí

$$y(t_X) = 0.$$

Dosazením do rovnice (2.9) obdržíme

$$y_0 \cosh \beta t_X = \tfrac{x_0}{\gamma} \sinh \beta t_X.$$

Odtud

$$\begin{aligned} \frac{\sinh \sqrt{bc}t_x}{\cosh \sqrt{bc}t_x} &= \frac{y_0}{x_0}\sqrt{\frac{c}{b}}, \\ \mathrm{tgh}\sqrt{bc}t_x &= \frac{1}{v}, \\ \sqrt{bc}t_x &= \mathrm{arctgh}\left(\frac{1}{v}\right). \end{aligned}$$

Využitím vztahu $\mathrm{arctgh}x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, můžeme čas ukončení boje vyjádřit v logaritmickém tvaru, který je pro výpočet pohodlnější

$$t_X = \frac{1}{2\sqrt{bc}} \ln \frac{v+1}{v-1}. \tag{2.12}$$

Stejná formule nám samozřejmě vyjde i pro čas ukončení boje vojska Y

$$t_Y = \frac{1}{2\sqrt{bc}} \ln \frac{1+v}{1-v}. \tag{2.13}$$

PŘÍKLAD 2: Proti sobě stojí vojsko X a vojsko Y. Strana X má 4 000 vojáků a strana Y má 3 000 vojáků. Střední rychlost palby vojáků vojska X je 10 výstřelů za minutu při pravděpodobnosti zásahu cíle $p_x = 0{,}2$ a střední rychlost palby vojáků strany Y je 15 výstřelů za minutu při pravděpodobnosti zásahu cíle $p_y = 0{,}15$. Vyšetřete:

a) která strana zvítězí,
b) jakou dobu bude boj probíhat,
Řešení:

$$\begin{aligned} c = r_x p_x &= 10 \cdot 0{,}2 = 2, \\ b = r_y p_y &= 15 \cdot 0{,}15 = 2{,}25, \\ x_0 &= 4\ 000, \\ y_0 &= 3\ 000. \end{aligned}$$

a) Vítězství vojska určíme porovnánímvýrazů $\sqrt{c}x_0$ a $\sqrt{b}y_0$.

$$\begin{aligned} \sqrt{c}x_0 &= \sqrt{2} \cdot 4\ 000 = 5\ 656{,}85, \\ \sqrt{b}y_0 &= \sqrt{2{,}25} \cdot 3\ 000 = 4\ 500. \end{aligned}$$

Tedy $\sqrt{c}x_0 > \sqrt{b}y_0$, což znamená vítězství pro stranu X.
Parametr v, charakterizující poměr sil, má hodnotu

$$v = \frac{x_0\sqrt{b}}{y_0\sqrt{c}} = 1{,}5.$$

b) Pro určení doby boje při vítězství strany X použijeme vztah

$$t_X = \frac{1}{2\sqrt{bc}} \ln\frac{v+1}{v-1} = \frac{1}{2\sqrt{2 \cdot 2{,}25}} \ln\frac{1+1{,}4}{1{,}4-1} = 0{,}256 \cdot \ln 8 = 0{,}46.$$

Doba boje bude 0,46 minuty.

2.1.3 Stav bojeschopných prostředků vítěze na konci boje

Předpokládejme vítězství vojska X. V okamžiku ukončení boje t_X bude pro počet bojeschopných prostředků $x(t_X)$ platit podle (2.9)

$$y_0 \cosh \beta t_X = \frac{x_0}{\gamma} \sinh \beta t_X.$$

Tato rovnice lze zapsat jako

$$\cosh \beta t_X = v \sinh \beta t_X.$$

Do rovnice (2.8) dosadíme za $\cosh(\beta t_X)$ a dostaneme

$$x(t_X) = x_0 \sinh(\beta t_X)(v - \frac{1}{v}).$$

Odtud a ze vztahu $\sinh x = \dfrac{\mathrm{tgh} x}{\sqrt{1-(\mathrm{tgh} x)^2}}$ získáme

$$x(t_X) = \sqrt{\frac{1}{c}(x_0^2 c - y_0^2 b)}, \tag{2.14}$$

což je počet bojeschopných prostředků, které vojsku X zůstanou v okamžiku ukončení boje.
Ztráty Z_X vítězné strany X na konci boje jsou

$$Z_X = x_0 - x(t_X) = x_0 - \sqrt{\frac{1}{c}(x_0^2 c - y_0^2 b)}.$$

Analogicky zvítězí-li vojsko Y, zůstane mu v okamžiku ukončení boje t_Y

$$y(t_Y) = \sqrt{\frac{1}{b}(y_0^2 b - x_0^2 c)} \tag{2.15}$$

bojeschopných prostředků.
Jeho ztráty jsou $Z_Y = y_0 - y(t_Y)$.

PŘÍKLAD 3: Určete pro bojovou situaci v příkladě 2) jaké bude mít ztráty vítězná strana.
Řešení:
Strana X bude mít v okamžiku ukončení boje ztráty

$$\begin{aligned} Z_X &= x_0 - x(t_X) = x_0 - \sqrt{1/c(x_0^2 c - y_0^2 b)} \\ &= 4\,000 - \sqrt{1/2 \cdot (16\,000\,000 \cdot 2 - 9\,000\,000 \cdot 2{,}25)} = 4\,000 - 2\,424 = 1\,576 \end{aligned}$$

vojáků. Vítězné straně X tedy zůstane asi 2 424 vojáků.

2.1.4 Spotřeba střeliva

Celková spotřeba střeliva v boji závisí na střední rychlosti střelby r_x a na způsobu zásobování jednotlivých bojových prostředků střelivem. Započítává se do ní i nepoužité střelivo ve zničených bojových prostředcích.

Existují tři základní varianty zásobování:
1) Zásobování střelivem se provádí tak, že se v žádném bojovém prostředku nevytváří zásoba střeliva, tzn. že každý bojový prostředek dostává 1 kus střeliva právě v okamžiku výstřelu. Celkové množství střeliva spotřebované v boje je

tedy dáno počtem provedených výstřelů. Tato varianta je v praxi neuskutečnitelná. Udává nám *minimální hodnotu* celkové spotřeby střeliva.

Nechť strana X zvítězí v čase t_X. Ztráty strany Y jsou číselně rovné počtu úspěšných výstřelů strany X. Počet úspěšných výstřelů se zároveň rovná součinu všech výstřelů a pravděpodobnosti zásahu jednotlivým výstřelem. Označíme-li $s(t)$ celkovou spotřebu střeliva v okamžiku t, platí:

$$s(t)p_x = y_0 - y(t), \quad \text{tedy} \quad s(t) = \frac{y_0 - y(t)}{p_x}.$$

Na konci boje v čase t_X je $y(t_X) = 0$ a celková spotřeba střeliva vítězné strany X je:

$$s(t_X) = \frac{y_0}{p_x}. \tag{2.16}$$

2) Zásobování střelivem se provádí tak, že na začátku boje je každému bojovému prostředku strany X vydáno tolik střeliva, kolik stačí v průběhu boje vystřílet. Předpokládáme, že žádný z bojovníků strany X není v boji zničen. Pro celkovou spotřebu střeliva $S(t_X)$ u této varianty zásobování platí:

$$S(t_X) = x_0 r_x t_X, \tag{2.17}$$

kde r_x je střední rychlost střelby. Číslo $S(t_X)$ nám udává *maximální hodnotu* celkové spotřeby střeliva.

3) Třetí varianta zásobování spočívá v přidělování střeliva bojeschopným prostředkům v menších dávkách po určitých časových intervalech. Tato varianta se v praxi vyskytuje nejčastěji. Optimální počet zásobovacích cyklů tak, aby celkové náklady byly minimální, lze určit pomocí operační analýzy (jde o řešení tzv. Wilsonova problému).

PŘÍKLAD 4: Určete pro bojovou situaci v příkladě 2) jaká je minimální a maximální spotřeba střeliva vítězné strany X.
Řešení:
Celková minimální spotřeba střeliva strany X je

$$s = \frac{y_0}{p_x} = \frac{3\ 000}{0{,}2} = 15\ 000 \text{ nábojů.}$$

Celková maximální spotřeba střeliva strany X je

$$S = x_0 r_x t_X = 4\ 000 \cdot 10 \cdot 0{,}46 \doteq 18\ 400 \text{ nábojů.}$$

2.2 Partyzánský boj: Lineární model

Budeme opět předpokládat, že nebudou žádné ztráty závislé na nebojových škodách a žádné posily. Tím se nám rovnice (2.2) pro partyzánský boj zredukují na tvar

$$\frac{dx}{dt} = -gxy, \qquad \frac{dy}{dt} = -hxy, \tag{2.18}$$

kde $g = r_y \dfrac{A_{ry}}{A_x}$ je kladný bojový koeficient účinnosti vojska X, tj. $g > 0$.
Přitom r_y je hustota toku výstřelů strany Y za časovou jednotku, A_{ry} je plocha, kde je partyzánské vojsko X odkryto a A_x je celková plocha, kde se partizánské vojsko pohybuje.
Obdobně $h = r_x \dfrac{A_{rx}}{A_y}$ je kladný bojový koeficient účinnosti vojska Y, tj. $h > 0$.
Dělením obdržíme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{h}{g}.$$

Integrací získáme vztah, který vysvětluje, proč se model nazývá *lineární*

$$g(y(t) - y_0) = h(x(t) - x_0). \tag{2.19}$$

Položme $L = gy_0 - hx_0$. Pak dostaneme

$$gy - hx = L. \tag{2.20}$$

$x(t)$ a $y(t)$ mohou nabývat pouze nezáporných hodnot, a proto se budeme zabývat pouze trajektoriemi ležícími v prvním kvadrantu (viz Obrázek 2.3). Systém (2.18) má 3 typy singulárních bodů: $(0,0), (x,0), (0,y)$, kde $x, y > 0$. Osy x a y jsou tedy tvořeny singulárními body.

Je-li $L = 0$, trajektorií systému (2.18) různá od singulárního bodu $(0,0)$ je polopřímka, jejíž rovnice je $y = \dfrac{hx}{g}$.
Je-li $L \neq 0$, trajektorie systému (2.18) jsou polopřímky $y = \dfrac{L + hx}{g}$.
Je-li $L < 0$, trajektorie se limitně (pro $t \to \infty$) blíží k ose x v bodě $x = -\dfrac{L}{h}$.
V tomto bodě zvítězí vojsko X, neboť vojsko Y přijde o všechny své bojeschopné prostředky. V opačném případě, je-li $L > 0$, pak zvítězí vojsko Y a trajektorie se limitně (pro $t \to \infty$) blíží k ose y v bodě $y = \dfrac{L}{g}$.

Podmínka pro vítězství strany X je tedy

$$gy_0 < hx_0$$

neboli

$$\frac{x_0}{y_0} > \frac{r_y}{r_x} \cdot \frac{A_{ry}}{A_{rx}} \cdot \frac{A_y}{A_x}.$$

Vojsko X musí maximalizovat poměr sil $\frac{x_0}{y_0}$ a zároveň minimalizovat poměr $\frac{A_y}{A_x}$ (tj. poměr ploch, kde se partyzánská vojska nachází). Poměry rychlosti střelby a velikosti odkrytého území nemůže ani jedna ze stran výrazně ovlivnit. Podmínka pro vítězství se tedy dá přepsat do tvaru

$$\frac{A_x x_0}{A_y y_0} > \frac{r_y}{r_x} \cdot \frac{A_{ry}}{A_{rx}},$$

kde $A_x x_0$ a $A_y y_0$ jsou rozhodující proměnné v partyzánském boji.
Pro vítězství vojska Y musí platit opačná nerovnost

$$\frac{A_y y_0}{A_x x_0} > \frac{r_x}{r_y} \cdot \frac{A_{rx}}{A_{ry}}.$$

Čas ukončení boje
Rovnice (2.19) vyjadřuje sílu vojska v závislosti na síle protivníka, ale nevyjadřuje ji v závislosti na čase t. Pomocí rovnice (2.20) dostaneme

$$\frac{dx}{dt} = -x(L + hx) \tag{2.21}$$

a podobně pro vojsko Y

$$\frac{dy}{dt} = -y(gy - L). \tag{2.22}$$

Separací proměnných můžeme rovnici (2.21) dále upravit na

$$\int dt = \int -\frac{dx}{x(L + hx)},$$

$$\int dt = -\int \frac{dx}{Lx} + \int \frac{hdx}{L(L + hx)},$$

$$t + k = -\frac{1}{L}\ln|x| + \frac{1}{L}\ln|L + hx|,$$

kde k je konstanta.

$$L(t + k) = \ln\left|\frac{L + hx}{x}\right|,$$

$$k_1 e^{Lt} = \frac{L + hx}{x},$$
$$k_1 x e^{Lt} = L + hx, \tag{2.23}$$

kde k_1 je konstanta. Užitím počáteční podmínky $x(0) = x_0$ dostáváme hodnotu konstanty

$$k_1 = \frac{L + hx_0}{x_0} \tag{2.24}$$

a po dosazení do (2.23) obdržíme

$$\frac{L + hx_0}{x_0} x e^{Lt} = L + hx.$$

Po několika úpravách získáme vztah vyjadřující sílu vojska X v závislosti na čase t

$$x(t) = \frac{Lx_0}{gy_0 e^{Lt} - hx_0}. \tag{2.25}$$

Podobně pro vojsko Y dostáváme

$$y(t) = \frac{Ly_0}{gy_0 - hx_0 e^{-Lt}}. \tag{2.26}$$

Rovnosti (2.25) a (2.26) platí pouze za přdpokladu $gy_0 \neq hx_0$ (tj. $L \neq 0$). V případě, že $gy_0 = hx_0$, tj. $L = 0$, musíme řešit rovnice

$$\frac{dx}{dt} = -hx^2, \tag{2.27}$$

$$\frac{dy}{dt} = -gy^2. \tag{2.28}$$

Metodou separace proměnných dostáváme řešení rovnice (2.27)

$$x(t) = \frac{1}{(t + hx_0)h} \tag{2.29}$$

a podobně i řešení rovnice (2.28)

$$y(t) = \frac{1}{(t + gy_0)g}. \tag{2.30}$$

Z výše uvedených vztahů (2.25), (2.26) a (2.29), (2.30) a ze znalosti singulárních bodů systému (2.18) vyplývá, že čas ukončení boje $t_X = \infty$ a $t_Y = \infty$, tj. boje budou trvat nekonečně dlouho. V praxi je situace trochu odlišná. Partyzánské války končí, ale jsou velmi vyčerpávající a vlečou se několik let.

2.3 Smíšený boj: Parabolický model

V tomto modelu partyzánská skupina bojuje proti vojsku konvenčnímu. Opět předpokládjeme, že nebudeme mít žádné operační ztráty a žádnou posilu. Rovnice pro smíšený boj (2.3) je dána ve tvaru

$$\frac{dx}{dt} = -gxy \qquad \frac{dy}{dt} = -cx, \tag{2.31}$$

kde X značí partyzánské vojsko, Y konvenční vojsko. Pro koeficienty g a c platí stejné vztahy jako v předchozích modelech. Dělením obdržíme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c}{gy}.$$

Integrací obdržíme vztah, který vysvětluje, proč se model nazývá *parabolický*

$$g(y^2(t) - y_0^2) = 2c(x(t) - x_0). \tag{2.32}$$

Položme $M = gy_0^2 - 2cx_0$. Pak dostaneme

$$M = gy^2 - 2cx. \tag{2.33}$$

$x(t)$ a $y(t)$ mohou nabývat pouze nezáporných hodnot, a proto se budeme zabývat pouze trajektoriemi ležícími v prvním kvadrantu (viz Obrázek 2.4). Systém (2.31) má 2 typy singulárních bodů: $(0,0), (0,y)$, kde $y > 0$. Celá osa y je tedy tvořena singulárními body.

Je-li $M = 0$, trajektoriíc systému (2.31) různá od singulárního bodu $(0,0)$ je parabola, jejíž rovnice je $x = \frac{g}{2c}y^2$.
Je-li $M \neq 0$, trajektorie systému (2.31) jsou části parabol $x = \frac{gy^2 - M}{2c}$.
Je-li $M < 0$, trajektorie protnou osu x v bodě $x = -\frac{M}{2c}$. V tomto bodě zvítězí partyzánská skupina X, neboť konvenční vojsko Y přijde o všechny své bojeschopné prostředky.
V opačném případě, je-li $M > 0$, pak zvítězí vojsko Y a trajektorie se limitně (pro $t \to \infty$)blíží k ose y v bodě $y = \sqrt{\frac{M}{g}}$.

Podmínka pro vítězství

Z reálných bitev je známo, že pokud má vyhrát konvenční vojsko Y nad partyzánskou skupinou X, pak poměr sil $\frac{y_0}{x_0}$ musí být výrazně větší než jedna. Podíváme se, co nám říká teoretický model. Předpokládejme, že konvenční vojsko Y vyhraje. To nastane za podmínky $M > 0$, tedy

$$gy_0^2 > 2cx_0,$$

která lze přepsat do tvaru

$$(\frac{y_0}{x_0})^2 > \frac{2c}{gx_0} = 2 \cdot \frac{r_x}{r_y} \cdot \frac{A_x p_x}{A_{ry}} \cdot \frac{1}{x_0}.$$

Z tvaru podmínky vyplývá, že nejdůležitější veličinou je poměr sil na počátku boje, který roste kvadraticky. Nyní budeme zkoumat jak velký musí být poměr $y_0 : x_0$, aby vyhrálo konvenční vojsko Y.

Příklad: Předpokládejme, že r_x a r_y jsou si přibližně rovny, tedy $\frac{r_x}{r_y} \sim 1$. Pravděpodobnost, že partyzán zasáhne cíl je $p_x = 0{,}1$ a že zranitelná část těla každého ukrytého partyzána je 0,2 m^2, tedy $A_{ry} = 0{,}2$. Po dosazení máme

$$(\frac{y_0}{x_0})^2 > \frac{A_x}{x_0}.$$

Partyzánská vojska jsou obvykle tvořena jen malými skupinami. Položme tedy $x_0 = 100$. Každý bojovník má prostor 100 m^2. Tedy $A_x = 100 \times 100 = 10\,000\ m^2$.

Po dosazení dostáváme

$$(\frac{y_0}{x_0})^2 > \frac{10\ 000}{100} = 100,$$
$$\frac{y_0}{x_0} > 10.$$

Toto je velmi zjednodušený smíšený model. Skutečný poměr sil konvenčního vojska a sil partyzánských skupin po 2. světové válce zkoumal S. J. Deichman[1]. Výsledky jeho práce[2] jsou znázorněny na Obrázku (2.5). Podle Deichmana musí být poměr sil, aby konvenční vojsko Y vyhrálo, nejméně 8.

Čas ukončení boje

Rovnice (2.32) vyjadřuje sílu vojska v závislosti na síle protivníka, ale nevyjadřuje ji v závislosti na čase t. Pomocí rovnice (2.33) dostaneme

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{g}x\sqrt{2cx + M} \tag{2.34}$$

a podobně pro konvenční vojsko Y

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2}(gy^2 - M). \tag{2.35}$$

Separací proměnných můžeme rovnici (2.34) dále upravit na

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2cx + M}} = -\sqrt{g}\int dt. \tag{2.36}$$

Za předpokladu $M > 0$ a pomocí substituce $v^2 = 2cx + M$, dostáváme

$$\int \frac{2dv}{v^2 - M} = -\sqrt{g}\int dt.$$
$$\int \frac{dv}{v - \sqrt{M}} - \int \frac{dv}{v + \sqrt{M}} = -\sqrt{gM}\int dt,$$
$$\ln \frac{|v - \sqrt{M}|}{|v + \sqrt{M}|} = -\sqrt{gM}t + l,$$
$$l_1 e^{-\sqrt{gM}t} = \frac{v - \sqrt{M}}{v + \sqrt{M}}.$$

[1]S. J. Deichman, *A Lanchester model of guerrilla warfare*, Operations Res., vol. 10, 1962

[2]Data Vietnam 1975 a Vietnam 1968 na Obr.(2.5) jsou přidány z encyklopedie *Britannicca*

Odtud si vyjádříme vztah pro v

$$v = \sqrt{M}\frac{1 + l_1 e^{-\sqrt{gM}t}}{1 - l_1 e^{-\sqrt{gM}t}}$$

a po zpětném dosazení $v = \sqrt{2cx + M}$ obdržíme

$$x(t) = \frac{M}{2c}\left[\left(\frac{1 + l_1 e^{-\sqrt{gM}t}}{1 - l_1 e^{-\sqrt{gM}t}}\right)^2 - 1\right], \tag{2.37}$$

kde l_1 je konstanta. Z počáteční podmínky $x(0) = x_0$ dostaneme její hodnotu

$$l_1 = \frac{cx_0 - \sqrt{Mg}y_0 + M}{cx_0}$$

nebo

$$l_1 = \frac{gy_0^2 - 2\sqrt{Mg}y_0 + M}{2cx_0}$$

Za předpokladu $M < 0$ a pomocí substituce $v^2 = 2cx + M$, lze rovnici (2.36) upravit na tvar

$$\int \frac{2dv}{\frac{v^2}{|M|} + 1} = M\sqrt{g}\int dt.$$

Integrací

$$2 \text{ arctg } \frac{v}{\sqrt{|M|}} = -\sqrt{|M|g}t + l_2,$$

$$v = \sqrt{|M|} \text{ tg } \frac{l_2 - \sqrt{|M|g}t}{2}$$

a zpětném dosazení $v = \sqrt{2cx + M}$ obdržíme

$$2cx + M = M \text{ tg}^2 \frac{l_2 - \sqrt{|M|g}t}{2}.$$

Po pár úpravách získáváme námi hledaný vztah

$$x(t) = \frac{1}{2c}\left(M \text{ tg}^2 \frac{l_2 - \sqrt{|M|g}t}{2} - M\right), \tag{2.38}$$

kde l_2 je konstanta, jejíž velikost je

$$l_2 = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2cx_0 + M}{|M|}}.$$

Za předpokladu $M = 0$, lze rovnici (2.34) zjednodušit na tvar

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{g}x\sqrt{2cx}.$$

Separací proměnných dostáváme

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x}} = -\sqrt{2cg}\int dt$$

a integrací

$$\frac{2}{\sqrt{x}} = t\sqrt{2cg} + l_3,$$

$$x(t) = \frac{4}{(t\sqrt{2cg} + l_3)^2}, \tag{2.39}$$

kde l_3 je konstanta, jejíž velikost je

$$l_3 = \frac{2}{\sqrt{x_0}}.$$

Nyní se budeme zabývat rovnicí (2.35). Separací proměnných můžeme tuto rovnici upravit na

$$\int dt = \int -\frac{2dy}{gy^2 - M} \tag{2.40}$$

a dále za předpokladu $M > 0$ můžeme pokračovat v řešení této rovnice

$$\int dt = \frac{1}{\sqrt{gM}}\int \frac{\sqrt{g}dy}{\sqrt{g}y + \sqrt{M}} - \frac{1}{\sqrt{gM}}\int \frac{\sqrt{g}dy}{\sqrt{g}y - \sqrt{M}},$$

$$\sqrt{gM}t + k = \ln \frac{|\sqrt{g}y + \sqrt{M}|}{|\sqrt{g}y - \sqrt{M}|},$$

kde k je konstanta.

$$e^{k_1}e^{\sqrt{gM}t} = \frac{\sqrt{g}y + \sqrt{M}}{\sqrt{g}y - \sqrt{M}}$$

a po několika úpravách dostaneme vztah vyjadřující sílu vojska Y v závislosti na čase t

$$y(t) = \frac{\sqrt{M}(k_1 e^{\sqrt{gM}t} + 1)}{\sqrt{g}(k_1 e^{\sqrt{gM}t} - 1)}, \tag{2.41}$$

kde k_1 je konstanta. Užitím počáteční podmínky $x(0) = x_0$ dostáváme hodnotu konstanty

$$k_1 = \frac{\sqrt{g}y_0 + \sqrt{M}}{\sqrt{g}y_0 - \sqrt{M}},$$

což lze přepsat jako

$$k_1 = \frac{gy_0^2 + 2\sqrt{gM}y_0 + M}{2cx_0}.$$

Předpokládejme nyní $M < 0$. Potom rovnici (2.40) můžeme přepsat na tvar

$$\int dt = \frac{2}{M} \int \frac{dy}{\frac{g}{|M|}y^2 + 1}.$$

Integrací dostáváme

$$t + k_2 = -\frac{2}{\sqrt{|M|g}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{g}{|M|}}\, y,$$

$$-\operatorname{tg} \frac{\sqrt{|M|g}(t + k_2)}{2} = \sqrt{\frac{g}{M}}\, y.$$

Pro vztah velikosti síly vojska Y v závislosti na čase t tedy platí

$$y(t) = -\sqrt{\frac{|M|}{g}} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{|M|g}(t + k_2)}{2}, \tag{2.42}$$

kde k_2 je konstanta a z počáteční podmínky $y(0) = y_0$ dostaneme její hodnotu

$$k_2 = -\frac{2}{\sqrt{|M|g}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{g}{M}}\, y_0.$$

V případě, že $M = 0$, tj. $gy^2 = 2cx$, se nám rovnice (2.35) zjednoduší na tvar

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{gy^2}{2}. \tag{2.43}$$

Metodou separace proměnných dostáváme

$$-\frac{2}{g}\int \frac{dy}{y^2} = \int dt,$$

$$\frac{2}{gy} = t + k_3,$$

kde k_3 je konstanta a po dosazení $y(0) = y_0$ dostaneme její hodnotu

$$k_3 = \frac{2}{gy_0}.$$

Řešení rovnice (2.36) je tedy

$$y(t) = \frac{2y_0}{tgy_0 + 2}. \tag{2.44}$$

Nyní můžeme vypočíst čas ukončení boje t_X. Předpokládejme vítězství partyzánské skupiny X, tj. $M < 0$. To znamená $y(t_X) = 0$. Po dosazení do (2.42) dosáváme

$$0 = \operatorname{tg} \frac{\sqrt{|M|g}(t_X + k_2)}{2},$$

$$0 = t_x + k_2,$$

$$t_X = \frac{2}{\sqrt{|M|g}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{g}{M}}\, y_0.$$

Čas ukončení boje t_Y (tj. vítězství konvenčního vojska Y) bude nekonečně velký, tedy $t_Y = \infty$.

Kapitola 3

Bitva o ostrov Ivodžima

Jedna z nejintenzivnějších bitev 2. světové války byl boj mezi japonskými a americkými jednotkami o strategický japonský ostrov Ivodžima. Během bojů americké vojsko získávalo posily $P(t)$, ale japonské vojskok ne.
Americká invaze začala 19. února 1945. Ostrov byl označen za bezpečný 16. března (28. den) a boje ustaly 24. března (36. den).
J. H. Engel použil model konvenčního boje

$$\frac{dA}{dt} = -bJ + P(t), \tag{3.1}$$

$$\frac{dJ}{dt} = -cA, \tag{3.2}$$

kde A je počet bojeschopných prostředků amerického vojska a J je počet bojeschopných prostředků vojska japonského.
Další derivací (3.2) a využitím vztahu (3.1) dostaneme nehomogenní lineární diferenciální rovnici 2. řádu:

$$\frac{d^2J}{dt^2} - bcJ = -cP(t). \tag{3.3}$$

Metodou variace konstant dostaneme řešení této rovnice

$$J(t) = J_0 \cosh \beta t - \frac{A_0}{\gamma} \sinh \beta t - \frac{1}{\gamma} \int_0^t \sinh \beta(t-s) P(s) ds, \tag{3.4}$$

kde J_0, A_0 je síla japonského a amerického vojska na ostrově před invazí (tedy $A_0 = 0$), $\beta = \sqrt{bc}$ a $\gamma = \sqrt{\frac{b}{c}}$.

Nyní můžeme pomocí vztahu (3.4) a (3.2) určit $A(t)$. Ze vztahu (3.4) si vyjádříme dJ/dt jako

$$\begin{aligned}\frac{dJ}{dt} &= \beta J_0 \sinh \beta t - \frac{\beta A_0}{\gamma} \cosh \beta t \\ &\qquad - \frac{1}{\gamma} \sinh \beta(t-t) P(t) - \frac{\beta}{\gamma} \int_0^t \cosh \beta (t-s) P(s) ds, \quad (3.5)\end{aligned}$$

kde jsme využili Leibnizovy formule pro derivaci integrálu

$$\frac{d}{dt} \int_a^t h(t,s) ds = h(t,t) + \int_a^t \frac{\partial}{\partial t} h(t,s) ds.$$

Pomocí rovností $\sinh 0 = 0$ a $\beta/\gamma = c$ můžeme vztah (3.5) zjednodušit na

$$\frac{dJ}{dt} = \beta J_0 \sinh \beta t - c A_0 \cosh \beta t - c \int_0^t \cosh \beta (t-s) P(s) ds.$$

Využitím $A_0 = 0$ a $A(t) = -(1/c)(dJ/dt)$ dostáváme námi hledaný vztah

$$A(t) = -\gamma J_0 \sinh \beta t + \int_0^t \cosh \beta (t-s) P(s) ds. \quad (3.6)$$

Podobně získáme i vztah pro $J(t)$:

$$J(t) = J_0 \cosh \beta t - \frac{1}{\gamma} \int_0^t \sinh \beta (t-s) P(s) ds. \quad (3.7)$$

Nyní srovnáme teoretický model se získanými daty. Problém je, že neexistují žádné japonské záznamy. Víme ale, že žádný Japonec neopustil ostrov během boje, žádná japonská loď či letoun nepřistál na ostrově nebo neopustil ostrov a každý japonský voják byl buď zabit nebo zajat.
Přehled ztrát amerického vojska je v následující tabulce.

	mrtví	**zranění**	**vyčerpaní**	**celkem**
Námořní pěchota	5 931	17 272	2 648	25 851
Loďstvo:				
námořníci a letci	633	1 158		1 791
zdravotní sbory	195	529		724
ženijní prapory	51	218		269
lékaři	2	12		14
Armádní jednotky	9	28		37
Celkem	**6 821**	**19 217**	**2 648**	**28 686**

Údaje o japonských vojácích

obrana-odhad	zajatci	mrtví
21 000	1 083	20 000

Využijeme upravených dat, s kterými počítal J. H. Engel. Položme $J_0 = 21500$.
Počet amerických posil $P(t)$ je znám:

$$P(t) = \begin{cases} 54000, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t < 2 \\ 6000, & 2 \leq t < 3 \\ 0, & 3 \leq t < 5 \\ 13000, & 5 \leq t < 6 \\ 0, & 6 \leq t < 36. \end{cases} \tag{3.8}$$

Potřebujeme získat konstanty β a γ, resp. b a c.
Můžeme je vypočítat pomocí znalosti aktuální síly amerického vojska v čase $t = 1, 2, ..., 36$, kterou si označíme $A_{akt}(t)$. Integrací vztahu (3.2) dostáváme následující rovnici

$$J(36) - J(0) = -c \int_0^{36} A_{akt}(t)dt = -c \sum_{t=1}^{36} A_{akt}(t), \tag{3.9}$$

z které můžeme vyjádřit koeficient c, jako

$$c = \frac{J_0 - J(36)}{\sum_{t=1}^{36} A_{akt}(t)}. \tag{3.10}$$

Z uveřejněných informací o denních ztrátách amerických vojáků J. H. Engel získal $\sum_{t=1}^{36} A_{akt}(t) = 2\ 037\ 000$. Tedy

$$c = \frac{21\ 500 - 0}{2\ 037\ 000} \sim 0.0106.$$

Ještě potřebujeme vyčíslit koeficient b.
Využijeme-li znalosti koeficientu c, můžeme určit přibližnou hodnotu síly vojska J v jednotlivých dnech, kterou označíme jako $J_{asi}(t)$ pro $t = 0, 1, ..., 36$. Měli bychom použít $t = 0, ..., 28$, protože 28. den byl ostrov zabezpečen a boj byl poté pouze ojedinělý. My ale neznáme $J(28)$ a proto musíme počítat $t = 0, ..., 36$.
Pro $J_{asi}(t)$ máme tedy

$$J_{asi}(t) = J_0 - c \sum_{k=1}^{t} A_{akt}(k), \qquad t = 0, ..., 36. \tag{3.11}$$

Integrací rovnice (3.1) dostáváme

$$A(t) = A_0 - b\int_0^t J_{asi}(s)ds + \int_0^t P(s)ds = -b\sum_{k=1}^{t} J_{asi}(k) + \sum_{k=1}^{t} P(k), \quad (3.12)$$

a dosazením za t=0, ..., 28 dostáváme

$$b = \frac{\sum_{k=1}^{28} P(k) - A(28)}{\sum_{k=1}^{28} J_{asi}(k)}, \quad (3.13)$$

kde

- $\sum_{t=1}^{28} P(t) = 73\ 000$ ... z informací o amerických posilách (3.8),
- $A(28) = 52\ 735$ ... ze zveřejněných informací o amerických ztrátách,
- $J_{asi} = 21\ 500 - 0.0106 \cdot \sum_{k=1}^{t} A_{akt}(k)$, pro $t = 0, ..., 36$,
- $\sum_{k=1}^{28} J_{asi}(k) = 372\ 500$ ... užitím (3.11) a ze zveřejněných informací o aktuální síle amerického vojska v čase t.

Dosazením do vzorce (3.13) získáme hodnotu b

$$b \sim 0.0544.$$

Obrázek (2.6) nám ukazuje srovnání reálných hodnot $A_{akt}(t)$ a teoreticky vypočítaných hodnot $A(t)$. Vidíme, že se velice dobře shodují.

Poznámka: Jsou-li hodnoty b, c stanoveny pro jednu bitvu, dají se použít pro všechny bitvy, které se bojují za stejných podmínek.

Kapitola 4

Richardsonova teorie konfliktu

V této kapitole budeme zkoumat matematický model popisující vztah mezi dvěma národy. Každý z národů zvažuje možnost útoku druhé strany v závislosti na vojenské připravenosti protivníka. Účelem není učinit vědecká tvrzení o zahraniční politice nebo určit den, kdy začne další válka. Tento model popisuje, co by lidé mohli udělat za určitých okolností.
Náš model je založen na práci Lewise Fry Richardsona, který napsal: „Proč je tolik národů neochotných, ale stále zlepšují a zvětšují svoji vojenskou vybavenost? Je to tím, že následují své tradice a intinkty a protože ještě nenašly vhodné intelektuální a morální prostředky kontrolovat situaci. Proces, který popíšeme pomocí následujících rovnic, není nevyhnutelný. Nastane tehdy, když instinkt a tradice přinutí jedince jednat nekontrolovaně.“

4.1 Matematický model

Označme:
$x = x(t)$ je válečný potenciál prvního národa X,
$y = y(t)$ je válečný potenciál národa Y,
ky je vliv velikosti válečného potenciálu národa Y na růst válečného potenciálu národa X a podobně lx je vliv válečného potenciálu národa X na růst válečného potenciálu národa Y, g a h vyjadřují vztahy mezi zeměmi.
$-ax$ jsou náklady na zbrojení země X a $-by$ jsou náklady na zbrojení země Y, kde k, l, g, h „a a b jsou kladné konstanty.

Dostáváme lineární systém diferenciálních rovnic:

$$\frac{dx}{dt} = -ax + ky + g, \tag{4.1a}$$

$$\frac{dy}{dt} = lx - by + h. \tag{4.1b}$$

Tento model není limitován pouze na dva národy, za $x(t)$ a $y(t)$ můžeme vzít i dvě aliance. Například, aliance Francie s Ruskem a aliance Německa s Rakousko-Uherskem těsně před První světovou válkou.

1) Předpokládejme, že vztahy mezi zeměmi jsou velmi dobré, ale přesto je jejich válečná pohotovost velká. V tomto případě žádná země nezbrojí, země žijí v míru. Například vztah mezi Kanadou a USA od roku 1817 nebo mezi Norskem a Švédskem od roku 1905.

Předpokládáme tedy, že $g = 0$, $h = 0$ a $a = 0$, $b = 0$. Tak dostáváme autonomní systém

$$\frac{dx}{dt} = ky, \qquad \frac{dy}{dt} = lx. \tag{4.2}$$

Obecné řešení tohoto systému je

$$x(t) = Ae^{\sqrt{kl}t} + Be^{-\sqrt{kl}t}, \tag{4.3}$$

$$y(t) = \sqrt{\frac{l}{k}}\left(Ae^{\sqrt{kl}t} - Be^{-\sqrt{kl}t}\right), \tag{4.4}$$

kde A, B jsou konstanty a platí $A + B = x_0$.

Systém (4.2) má jeden singulární bod $(x, y) = (0, 0)$. Charakteristický polynom $p_1(\lambda)$ tohoto systému je

$$p_1(\lambda) = \lambda^2 - kl$$

a jeho kořeny jsou nenulová reálná čísla různého znaménka

$$\lambda_1 = \sqrt{kl}, \qquad \lambda_2 = -\sqrt{kl}.$$

Singulární bod $(x, y) = (0, 0)$ je nestabilní, typu sedlo (viz obr. (4.1)). To znamená, že stav, kdy země žijí v míru, je dlouhodobě neuržitelný.

2) Pokud se vzájemné vztahy zemí zhorší, začnou země zlepšovat a zvětšovat svoji vojenskou vybavenost. V tomto případě dostáváme

$$\frac{dx}{dt} = -ax + ky + g, \tag{4.5a}$$
$$\frac{dy}{dt} = lx - by + h. \tag{4.5b}$$

Položíme-li právé strany rovny nule, získáme lineární systém

$$ax - ky = g, \tag{4.6a}$$
$$-lx + by = h. \tag{4.6b}$$

Tento systém (4.6) má jeden singulární bod

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{kh+gb}{ab-kl}, \frac{ah+gl}{ab-kl}\right), \tag{4.7}$$

pokud $ab - kl \neq 0$. Nyní budeme zkoumat, jestli je tento singulární bod stabilní nebo nestabilní.
Charakteristický polynom $p_2(\lambda)$ systému (4.6) je

$$p_2(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -a-\lambda & k \\ l & -b-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + (a+b)\lambda + ab - kl$$

a jeho kořeny λ_1 a λ_2 jsou nenulová reálná čísla tvaru

$$\lambda_{1/2} = \frac{-(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4(ab-kl)}}{2}$$

neboli

$$\lambda_{1/2} = \frac{-(a+b) \pm \sqrt{(a-b)^2 + 4kl}}{2}.$$

Označme $\Delta := ab - kl$ a diskriminant charakteristické rovnice $D := (a-b)^2 + 4kl$.

Jestliže $\Delta > 0$, pak singulární bod (4.7) leží v prvním kvadrantu. Ten si můžeme rozdělit na čtyři oblasti A, B, C a D (viz obr. (4.2)).
Pro každý bod ležící v oblasti A, platí

$$by - lx - h > 0, \qquad ky - ax + g > 0,$$

neboli

$$\frac{dy}{dt} < 0, \qquad \frac{dx}{dt} > 0.$$

Pro každý bod ležící v oblasti B platí

$$by - lx - h > 0, \qquad ky - ax + g < 0,$$

neboli

$$\frac{dy}{dt} < 0, \qquad \frac{dx}{dt} < 0.$$

Podobně pro body v oblasti C platí

$$\frac{dy}{dt} > 0, \qquad \frac{dx}{dt} > 0$$

a pro oblast D platí

$$\frac{dy}{dt} > 0, \qquad \frac{dx}{dt} < 0.$$

Singulární bod (x_0, y_0) je tedy stabilní uzel. V tomto bodě jsou síly vojsk v rovnováze a válka nezačne.

Jestliže $\Delta < 0$, je singulární bod (x_0, y_0) sedlo. Protože ale neleží v prvním kvadrantu, je pro nás nedůležitý. Jestliže $\Delta = 0$, singulární bod neexistuje nebo nebo máme nekonečně mnoho singulárních bodů ležících na přímce. V posledních dvou případech se teoreticky zbrojí do nekonečna, ale prakticky to není z ekonomických důvodů možné.

4.2 Určování velikosti konstant g, h, a, b a k, l

Konstanty g a h jsou neměřitelné. Hodnoty konstant a, b a k, l lze získat. Použijeme k tomu následujích úvah.

Konstanty a, b se dají interpretovat jako převrácené hodnoty času. Fyzikové konstanty a^{-1}, b^{-1} nazývají regenerační doba. Je-li $y \equiv 0$ a $g \equiv 0$, potom $x' = ax$. Tedy

$$x(t) = e^{-a(t-t_0)}x(t_0),$$

$$x(t_0 + a^{-1}) = \frac{x(t_0)}{e}.$$

Richardson ze svých poznatků stanovil, že konstanta a^{-1} je rovna době existence parlamentu národa X. Například hodnota této konstanty pro Velkou Británii je $a = 0{,}2$, neboť se britský parlament stanovuje každých 5 let.

K určení hodnot k, l předpokládejme, že $g = 0$, $y = y_1$ a tedy

$$\frac{dx}{dt} = ky_1 - ax.$$

Je-li $x = 0$, potom

$$\frac{1}{k} = \frac{y_1}{x'}.$$

Tedy $1/k$ je čas potřebný národem X k obsazení (zajmutí) národa Y, za předpokladu, že
1. ozbrojení národa Y je konstantní,
2. nejsou žádné útoky ze strany národa Y,
3. náklady na zbrojení nezpomalují ekonomický růst národa X.

Vezměme například Německo, které během 3 let (1937-1939), obsadilo postupně všechny své sousední státy. Tedy $k = 0{,}3$ (rok^{-1}).

Hodnota konstanty k je také závislá na velikosti rozvoje průmyslu národa. Například $k = 0{,}15$ je velikost konstanty národa, který by měl poloviční průmysl než Německo.

Příklad: Zkusme nyní aplikovat náš model na vojenský konflikt v Evropě v letech 1909-1914. V té době se Francie spojila s Ruskem, tuto alianci si označíme jako aliance X. Jako alianci Y označíme spojenectví Německa a Rakousko-Uherska. Obě aliance byly zhruba stejně velké, tedy $k = l$ a asi třikrát větší než samostatné Německo. Dostáváme $k = l = 0{,}9$. Dále předpokládejme $a = b = 0{,}2$. Potom

$$\frac{dx}{dt} = -ax + ky + g, \qquad \frac{dy}{dt} = kx - ay + h. \tag{4.8}$$

Tento systém má jeden singulární bod (x_0, y_0)

$$x_0 = \frac{kh + ag}{a^2 - k^2}, \qquad y_0 = \frac{kg + ah}{a^2 - k^2},$$

který je nestabilní a je typu sedlo, neboť

$$\Delta = a^2 - k^2 = 0,2^2 - 0,3^2 = 0,04 - 0,81 = -0,77 < 0.$$

Dostáváme tedy, že aliance X a Y vstoupily do války, což je v souladu s historickými fakty.

Při sestavování modelu, jsme předpokládali, že g, h jsou v čase konstantní. Ve skutečnosti se tyto veličiny velice mění v závislosti na čase a neměnnost můžeme předpokládat pouze při velice dlouhých časových intervalech.

Literatura

[1] Kalas J., Pospíšil Z. *Spojité modely v biologii* Brno: Přírodovědecká fakulta MU 2001.

[2] Kalas J., Ráb M.: *Obyčejné diferenciální rovnice* Brno: Přírodovědecká fakulta 2001.

[3] Seberová H., Navrátil M.: *Pravděpodobnost a matematická statistika, matematické modelování bojové činnosti* Vyškov: VVŠ PV 1988.

[4] Braun M., Coleman C.S., Drew D.A.: *Differential Equation Models* Springer-Verlag 1983.

[5] Braun M.: *Differential Equation and Their Applications* Springer-Verlag, New York Heilderberg Berlin 1983.